# 「離散数学」資料 1 — 無限を数える

鴨 浩靖

2020 年 10 月 6 日 初版
2020 年 10 月 7 日 修正版
2022 年 10 月 6 日 再修正版

# 素数と自然数

素数を並べる。

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23 \quad 29 \quad 31 \quad \cdots$$

# 素数と自然数

自然数と対応づける。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots
\end{array}
$$

# 素数と自然数

自然数と対応づける。

$$\begin{array}{cccccccccccc} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

素数と自然数は同じだけ存在する

# 数の階層

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

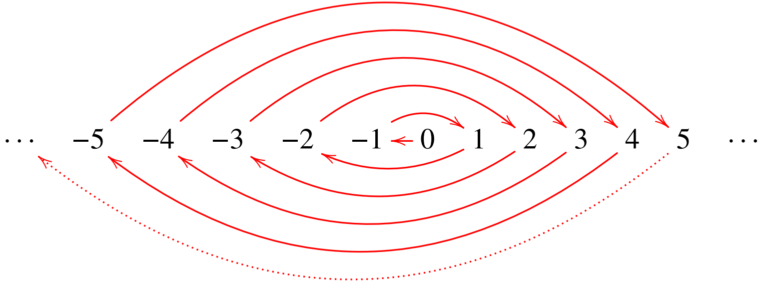
# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

整数を双方向に一列に並べる。

$$\cdots \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \cdots$$

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

片方向に並べ替える。



# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

自然数と対応づける。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & 5 & \cdots
\end{array}
$$

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

自然数と対応づける。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & 5 & \cdots
\end{array}
$$

自然数と整数は同じだけ存在する

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

## 練習問題

1. この方法で自然数 $x$ に対応する整数を計算するプログラムを書け。
2. この方法で整数 $n$ に対応する自然数を計算するプログラムを書け。
3. 整数を片方向に並べる方法は他にもいろいろある。他の方法を考えてみよ。

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

## $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

正の有理数を分数表記して縦横に並べる。

$$
\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \cdots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \cdots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \cdots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \cdots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & \cdots \\
1/6 & 2/6 & 3/6 & 4/6 & 5/6 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

一列に並べ替える。

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \cdots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \cdots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \cdots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \cdots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & 5/5 & \cdots \\
1/6 & 2/6 & 3/6 & 4/6 & 5/6 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

既約分数でないものを取り除く。

$$\begin{array}{cccccc}
1/1 & 2/1 & 3/1 & 4/1 & 5/1 & \cdots \\
1/2 & \cancel{2/2} & 3/2 & \cancel{4/2} & 5/2 & \cdots \\
1/3 & 2/3 & \cancel{3/3} & 4/3 & 5/3 & \cdots \\
1/4 & \cancel{2/4} & 3/4 & \cancel{4/4} & 5/4 & \cdots \\
1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 & \cancel{5/5} & \cdots \\
1/6 & \cancel{2/6} & \cancel{3/6} & \cancel{4/6} & 5/6 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

正の整数と対応づける。

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 1/2 & 2 & 1/3 & 3 & 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4 & 1/5 & 5 & \cdots \end{array}$$

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

零と負数を追加する。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\cdots & -5 & -1/5 & -4 & -3/2 & -2/3 & -1/4 & -3 & -1/3 & -2 & -1/2 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & 1 & 1/2 & 2 & 1/3 & 3 & 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4 & 1/5 & 5 & \cdots
\end{array}
$$

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

零と負数を追加する。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & -11 & -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
\cdots & -5 & -1/5 & -4 & -3/2 & -2/3 & -1/4 & -3 & -1/3 & -2 & -1/2 & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
0 & 1 & 1/2 & 2 & 1/3 & 3 & 1/4 & 2/3 & 3/2 & 4 & 1/5 & 5 & \cdots
\end{array}
$$

整数と有理数は同じだけ存在する

# $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$

## 練習問題

4. この方法で整数 $n$ に対応する有理数を計算するプログラムを書け。
5. この方法で有理数 $p/q$ に対応する整数を計算するプログラムを書け。
6. 正の有理数を一列に並べる方法は他にもいろいろある。他の方法を考えてみよ。

## 練習問題

7. 有理数を片方向で一列に並べる方法はいろいろある。複数の方法を考えてみよ。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ を 0 より大きく 1 以下の実数の列とする。

（添字を 1 から始めているのは単に技術的理由）

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

十進無限小数展開する。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots \\
x_4 &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\dots \\
x_5 &= 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\dots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

（各 $a_{mn}$ は $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のいずれか）

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

十進無限小数展開する。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\
x_4 &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\
x_5 &= 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

（各 $a_{mn}$ は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれか）

2 通りに十進小数展開できるものについては、$999\ldots$ のほうを選び、$000\ldots$ のほうをは選ばない。
たとえば、$0.2000\ldots = 0.1999\ldots$ については、$0.1999\ldots$ を選ぶ。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

十進無限小数展開する。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\ldots \\
x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\ldots \\
x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\ldots \\
x_4 &= 0.a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}\ldots \\
x_5 &= 0.a_{51}a_{52}a_{53}a_{54}a_{55}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

（各 $a_{ij}$ は $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のいずれか）

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, \ldots$ に着目。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, \ldots$ に着目。

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$ を

$$b_n = \begin{cases} 5 & a_{nn} \neq 5 \text{ のとき} \\ 6 & a_{nn} = 5 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, \ldots$ に着目。

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$ を

$$b_n = \begin{cases} 5 & a_{nn} \neq 5 \text{ のとき} \\ 6 & a_{nn} = 5 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。

常に $b_n \neq a_{nn}$ が成り立つことが重要。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, \ldots$ に着目。

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$ を

$$b_n = \begin{cases} 5 & a_{nn} \neq 5 \text{ のとき} \\ 6 & a_{nn} = 5 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。

実数 $y$ を十進小数展開

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$$

で定める。

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, \ldots$ に着目。

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \ldots$ を

$$b_n = \begin{cases} 5 & a_{nn} \neq 5 \text{ のとき} \\ 6 & a_{nn} = 5 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。

実数 $y$ を十進小数展開

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \ldots$$

で定める。

$y$ は $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ のいずれとも等しくない。
$\because y$ と $x_n$ は $10^{-n}$ の位が必ず異なる。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

0 より大きく 1 以下の実数の列 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ をどのように選んでも、そのいずれとも等しくない 0 より大きく 1 以下の実数を見つけることができる。

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

0 より大きく 1 以下の実数の列 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ をどのように選んでも、そのいずれとも等しくない 0 より大きく 1 以下の実数を見つけることができる。

### 例

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0.10100\ldots \\
x_2 &= 0.33333\ldots \\
x_3 &= 0.42411\ldots \\
x_4 &= 0.14159\ldots \\
x_5 &= 0.71828\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

に対して

$$
y = 0.55565\ldots
$$

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

以上の方法を利用すると、一般の実数の列 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ をどのように選んでも、そのいずれとも等しくない実数を見つけることができる。（詳細略）

## $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$

以上の方法を利用すると、一般の実数の列 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$ をどのように選んでも、そのいずれとも等しくない実数を見つけることができる。（詳細略）

実数は自然数よりも真にたくさんある。

# $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$

## 練習問題

7. $0$ より大きく $1$ 以下の実数の列に対してそのいずれとも等しくない $0$ より大きく $1$ 以下の実数を見つける方法は他にもいろいろある。他の方法を考えてみよ。

## $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

0 個以上の $0$ の後に $0$ 以外の 1 個の数字が並ぶ列を<u>連</u>と呼ぶ。
十進小数展開を蓮に分解する。

## 例

$$
\begin{aligned}
0.101001000100001\ldots &\mapsto 0.\ 1\ 01\ 001\ 0001\ 00001\ \ \ldots \\
0.33333\ldots &\mapsto 0.\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

まず、$0$ より大きく $1$ 以下の実数と
実部も虚部も $0$ より大きく $1$ 以下の複素数を
対応させる。

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

$z$ を実部も虚部も $0$ より大きく $1$ 以下の複素数とする。
$z$ の実部と虚部を十進小数展開して連に分解する。

$$\operatorname{Re} z = 0.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots$$
$$\operatorname{Im} z = 0.r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 r'_5 \ldots$$

連の並びとしてマージしたものを十進小数展開とする実数 $x$ を作る。

$$x = 0.r_1 r'_1 r_2 r'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4 r_5 r'_5 \ldots$$

この実数 $x$ は $0$ より大きく $1$ 以下である。

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

$z$ を実部も虚部も 0 より大きく 1 以下の複素数とする。
$z$ の実部と虚部を十進小数展開して連に分解する。

$$\operatorname{Re} z = 0.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \dots$$
$$\operatorname{Im} z = 0.r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 r'_5 \dots$$

連の並びとしてマージしたものを十進小数展開とする実数 $x$ を作る。

$$x = 0.r_1 r'_1 r_2 r'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4 r_5 r'_5 \dots$$

この実数 $x$ は 0 より大きく 1 以下である。

例

$$\operatorname{Re} z = 0.101001000100001 \dots$$
$$\operatorname{Im} z = 0.33333 \dots$$

のとき

$$x = 0.1301300130001300013 \dots$$

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

$z$ を実部も虚部も $0$ より大きく $1$ 以下の複素数とする。
$z$ の実部と虚部を十進小数展開して連に分解する。

$$\operatorname{Re} z = 0.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots$$
$$\operatorname{Im} z = 0.r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 r'_5 \ldots$$

連の並びとしてマージしたものを十進小数展開とする実数 $x$ を作る。

$$x = 0.r_1 r'_1 r_2 r'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4 r_5 r'_5 \ldots$$

この実数 $x$ は $0$ より大きく $1$ 以下である。

数字の並びとしてマージするのではなく
連の並びとしてマージするのは
$000\ldots$ の出現を防ぐため。

## $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

$z$ が一般の複素数の場合、実部と虚部を十進小数展開し、整数部と小数部に分け、小数部は連に分解する。

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= n + 0.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots \\ \operatorname{Im} z &= n' + 0.r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 r'_5 \ldots \end{aligned}$$

整数の対 $\langle n, n' \rangle$ に対応する整数 $m$ を作る。（詳細略）
マージして実数 $x$ を作る。

$$x = m + 0.r_1 r'_1 r_2 r'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4 r_5 r'_5 \ldots$$

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$

$z$ が一般の複素数の場合、実部と虚部を十進小数展開し、整数部と小数部に分け、小数部は連に分解する。

$$\operatorname{Re} z = n + 0.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \ldots$$
$$\operatorname{Im} z = n' + 0.r'_1 r'_2 r'_3 r'_4 r'_5 \ldots$$

整数の対 $\langle n, n' \rangle$ に対応する整数 $m$ を作る。（詳細略）
マージして実数 $x$ を作る。

$$x = m + 0.r_1 r'_1 r_2 r'_2 r_3 r'_3 r_4 r'_4 r_5 r'_5 \ldots$$

実数と複素数は同じだけ存在する

# $\mathbb{R}$ と $\mathbb{H}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

## $\mathbb{R}$ と $\mathbb{H}$

実数と四元数は同じだけ存在する。（詳細略）

## $\mathbb{R}$ と $\mathbb{H}$

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | 自然数全体 |
| $\mathbb{Z}$ | 整数全体 |
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |
| $\mathbb{C}$ | 複素数全体 |
| $\mathbb{H}$ | 四元数全体 |
| $\mathbb{O}$ | 八元数全体 |

## $\mathbb{R}$ と $\mathbb{O}$

実数と八元数は同じだけ存在する。（詳細略）

# まとめ

- 自然数と整数と有理数は、それぞれ、同じだけ存在する。
- 実数は自然数よりも真にたくさん存在する。
- 実数と複素数と四元数と八元数は、それぞれ、同じだけ存在する。

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C} \subsetneq \mathbb{H} \subsetneq \mathbb{O}$$

# おまけ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Q}$ | 有理数全体 |
| $\bar{\mathbb{Q}}$ | 代数的実数全体 |
| $\mathscr{R}$ | 計算可能実数全体 |
| $\mathbb{R}$ | 実数全体 |

$$\mathbb{Q} \subsetneq \bar{\mathbb{Q}} \subsetneq \mathscr{R} \subsetneq \mathbb{R}$$