

離散数学 資料 10  
選言標準形と連言標準形

鴨 浩靖

2021 年 1 月 5 日 初版

## 命題論理式の同値性

命題論理式  $\phi$  と  $\psi$  が同値

$\iff$  命題変数の真理値をどのように選んでも、常に  $v(\phi) = v(\psi)$

# 選言標準形

リテラル ::= 命題変数 |  $\neg$ 命題変数

基本積 ::= リテラル | 基本積  $\wedge$  リテラル

選言標準形 ::= 基本積 | 選言標準形  $\vee$  基本積

## 選言標準形の存在

任意の命題論理式に対して、それと同値な選言標準形が存在する。  
ただし、同値な選言標準形は一つだけではない。

# 選言標準形を求めるアルゴリズム 1

1.  $v(\phi \Rightarrow \psi) = v(\neg\phi \vee \psi)$  を使って  $\Rightarrow$  をすべて消す。
  - ▶  $\phi \Rightarrow \psi$  を  $\neg\phi \vee \psi$  に置き換える。
2. ド・モルガン則を使って  $\neg$  をできる限り内側に動かす。
  - ▶  $\neg(\phi \wedge \psi)$  を  $\neg\phi \vee \neg\psi$  に置き換える。
  - ▶  $\neg(\phi \vee \psi)$  を  $\neg\phi \wedge \neg\psi$  に置き換える。
3. 二重否定を消す。
  - ▶  $\neg\neg\phi$  を  $\phi$  に置き換える。
4. 分配則を使って  $\wedge$  をできる限り内側に動かす。
  - ▶  $(\phi \vee \psi) \wedge \chi$  を  $(\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)$  に置き換える。
  - ▶  $\phi \wedge (\psi \vee \chi)$  を  $(\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$  に置き換える。
5. (必須でない) 命題変数の重複を整理する。
  - ▶ 基本積に同一のリテラルが複数回出現していれば、一つにまとめる。
  - ▶ 基本積に命題変数とその否定が存在していれば、その基本積を消す。

# 選言標準形を求めるアルゴリズム 1

例

$$\begin{aligned} & (X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z) \\ \rightsquigarrow & (X \wedge Y) \wedge (\neg\neg X \vee Z) \\ \rightsquigarrow & X \wedge Y \wedge (X \vee Z) \\ \rightsquigarrow & (X \wedge Y \wedge X) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \\ \rightsquigarrow & (X \wedge Y) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \end{aligned}$$

## 選言標準形を求めるアルゴリズム 2

命題論理式  $\phi$  に出現する命題変数が  $X_1, \dots, X_n$  の場合

- ▶  $\phi$  の真理値表を作る。
- ▶ 真理値表から  $v(\phi) = \text{真}$  となる行をすべて取り出す。
- ▶ 取り出した各行について、基本積  $l_1 \wedge \dots \wedge l_n$  を作る。ただし、

$$l_i \equiv \begin{cases} X_i & v(X_i) = \text{真 のとき} \\ \neg X_i & v(X_i) = \text{偽 のとき} \end{cases}$$

- ▶ 作られた基本積すべてを  $\vee$  で結ぶ。

## 選言標準形を求めるアルゴリズム2

例

$$(X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z)$$

$X$	$Y$	$Z$	$(X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z)$	基本積
真	真	真	真	$X \wedge Y \wedge Z$
真	真	偽	真	$X \wedge Y \wedge \neg Z$
真	偽	真	偽	
真	偽	偽	偽	
偽	真	真	偽	
偽	真	偽	偽	
偽	偽	真	偽	
偽	偽	偽	偽	

$$\rightsquigarrow (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$$

# 連言標準形

リテラル ::= 命題変数 |  $\neg$ 命題変数

基本和 ::= リテラル | 基本和  $\vee$  リテラル

連言標準形 ::= 基本和 | 連言標準形  $\wedge$  基本和

## 連言標準形の存在

任意の命題論理式に対して、それと同値な連言標準形が存在する。  
ただし、同値な連言標準形は一つだけではない。

# 連言標準形を求めるアルゴリズム 1

1.  $v(\phi \Rightarrow \psi) = v(\neg\phi \vee \psi)$  を使って  $\Rightarrow$  をすべて消す。
  - ▶  $\phi \Rightarrow \psi$  を  $\neg\phi \vee \psi$  に置き換える。
2. ド・モルガン則を使って  $\neg$  をできる限り内側に動かす。
  - ▶  $\neg(\phi \wedge \psi)$  を  $\neg\phi \vee \neg\psi$  に置き換える。
  - ▶  $\neg(\phi \vee \psi)$  を  $\neg\phi \wedge \neg\psi$  に置き換える。
3. 二重否定を消す。
  - ▶  $\neg\neg\phi$  を  $\phi$  に置き換える。
4. 分配則を使って  $\vee$  をできる限り内側に動かす。
  - ▶  $(\phi \wedge \psi) \vee \chi$  を  $(\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)$  に置き換える。
  - ▶  $\phi \vee (\psi \wedge \chi)$  を  $(\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$  に置き換える。
5. (必須でない) 命題変数の重複を整理する。
  - ▶ 基本和に同一のリテラルが複数回出現していれば、一つにまとめる。
  - ▶ 基本和に命題変数とその否定が存在していれば、その基本和を消す。

# 連言標準形を求めるアルゴリズム 1

例

$$\begin{aligned} & (X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z) \\ & \rightsquigarrow (X \wedge Y) \wedge (\neg\neg X \vee Z) \\ & \rightsquigarrow X \wedge Y \wedge (X \vee Z) \end{aligned}$$

## 連言標準形を求めるアルゴリズム 2

命題論理式  $\phi$  に出現する命題変数が  $X_1, \dots, X_n$  の場合

- ▶  $\phi$  の真理値表を作る。
- ▶ 真理値表から  $v(\phi) = \text{偽}$  となる行をすべて取り出す。
- ▶ 取り出した各行について、基本積  $l_1 \vee \dots \vee l_n$  を作る。ただし、

$$l_i \equiv \begin{cases} X_i & v(X_i) = \text{偽} \text{ のとき} \\ \neg X_i & v(X_i) = \text{真} \text{ のとき} \end{cases}$$

- ▶ 作られた基本積すべてを  $\wedge$  で結ぶ。

## 連言標準形を求めるアルゴリズム2

例

$$(X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z)$$

X	Y	Z	$(X \wedge Y) \wedge (\neg X \Rightarrow Z)$	基本和
真	真	真	真	
真	真	偽	真	
真	偽	真	偽	$\neg X \vee Y \vee \neg Z$
真	偽	偽	偽	$\neg X \vee Y \vee Z$
偽	真	真	偽	$X \vee \neg Y \vee \neg Z$
偽	真	偽	偽	$X \vee \neg Y \vee Z$
偽	偽	真	偽	$X \vee Y \vee \neg Z$
偽	偽	偽	偽	$X \vee Y \vee Z$

$$\rightsquigarrow (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee \neg Z) \\ \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee Z)$$

# まとめ

- ▶ 選言標準形
- ▶ 連言標準形