問題 1. （削除）

問題 2. 集合 X, Y について $\#(X \times Y) = \#(Y \times X)$ が成り立つことを示せ。

問題 3. 写像（全域写像）$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ についての以下のそれぞれの問について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

(i) f も g も全射のとき、$g \circ f$ は全射か？
(ii) f も g も単射のとき、$g \circ f$ は単射か？
(iii) $g \circ f$ が全射のとき、f は全射か？
(iv) $g \circ f$ が全射のとき、g は全射か？
(v) $g \circ f$ が単射のとき、f は単射か？
(vi) $g \circ f$ が単射のとき、g は単射か？

問題 4. $\mathbb{R}^3 \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ 上の関係 $\sim$ を以下で定義する。

$$\langle u,v,w\rangle \sim \langle x,y,z\rangle \iff \exists k[u = kx \ \wedge\ v = ky \ \wedge\ w = kz] \qquad \text{ただし、変数 } k \text{ は実数}$$

このとき、$\sim$ は $\mathbb{R}^3 \setminus \{\langle 0,0,0\rangle\}$ 上の同値関係であることを示せ。

問題 5. 以下のそれぞれが常に成り立つことを示せ。

(i) $v((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) = v((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B))$
(ii) $v(\neg A \vee \neg\neg A) =$ 真
(iii) $v((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)) =$ 真
(iv) $v(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A) =$ 真

問題 6. 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。

- 変数は自然数（0 を含む）を動き、論理記号の他に使える記号は、自然数定数 0, 1, 2,. . . 、足し算 $+$、掛け算 $\cdot$、相等 $=$、大小比較 $<, \leq, >, \geq$ のみとする。
  (i) 2 以外の素数は偶数ではない。
  (ii) 1327 より大きく 1361 より小さな素数は存在しない。
  (iii) 3 で割って 1 余る自然数を 9 で割った余りは 1 か 4 か 7 である。
  (iv)（ゴールドバッハ予想）4 以上の偶数は二つの素数の和で表すことができる。
- 変数は実数を動き、論理記号の他に使える記号は、実数定数、足し算 $+$、引き算 $-$、掛け算 $\cdot$、相等 $=$、大小比較 $<, \leq, >, \geq$ のみとする。
  (v) 変数 x についての任意の実数係数三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ は実数解をもつ。（$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が三次方程式であるためには $a \neq 0$ であることが必要なことに注意）

おまけ問題 1. 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。