問題用紙は 2 ページある。

問題 1. a は実数とする。写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が全単射となる a の範囲を、f を以下のそれぞれで定義した場合に、それぞれ、求めよ。

(i) $f(x)=x^3-x^2+ax$

(ii) $f(x)=e^x+ax$

(iii) $f(x)=\sin x+ax$

問題 2. 集合 A とその部分集合 B が与えられているとする。$\mathscr{P}A$ 上の二項関係 $\approx$ を

$$X\approx Y \iff X\setminus Y\subset B \text{ かつ } Y\setminus X\subset B$$

で定める。

(i) $\varnothing\approx B$ を示せ。

(ii) $A\setminus B\approx A$ を示せ。

(iii) $\approx$ は同値関係であることを示せ。

問題 3. $(L_0,\sqsubseteq_0)$, $(L_1,\sqsubseteq_1)$, $(L_2,\sqsubseteq_2)$ を半順序集合とする。集合 L を

$$L=(\{0\}\times L_0)\cup(\{1\}\times L_1)\cup(\{2\}\times L_2)$$

で定める。L 上の二項関係 $\sqsubseteq$ と $\sqsubseteq'$ と $\sqsubseteq''$ を

$$\begin{aligned}
\langle i,x\rangle\sqsubseteq\langle j,y\rangle &\iff (i=0 \text{ かつ } j=0 \text{ かつ } x\sqsubseteq_0 y)\\
&\qquad \text{または } (i=1 \text{ かつ } j=1 \text{ かつ } x\sqsubseteq_1 y)\\
&\qquad \text{または } (i=2 \text{ かつ } j=2 \text{ かつ } x\sqsubseteq_2 y),\\
\langle i,x\rangle\sqsubseteq'\langle j,y\rangle &\iff (i=0 \text{ かつ } j\in\{1,2\}) \text{ または } \langle i,x\rangle\sqsubseteq\langle j,y\rangle,\\
\langle i,x\rangle\sqsubseteq''\langle j,y\rangle &\iff i<j \text{ または } \langle i,x\rangle\sqsubseteq\langle j,y\rangle,
\end{aligned}$$

で定める。

(i) $\sqsubseteq$ は半順序であることを示せ。

(ii) $\sqsubseteq'$ は半順序であることを示せ。

(iii) $\sqsubseteq''$ は半順序であることを示せ。

問題 4. 以下の命題論理式の真理値表を書け。($\neg$ は他の論理演算子よりも結合が強いものとする)

(i) $(A\to B)\wedge(A\to C)$

(ii) $\neg((\neg A\vee\neg B)\wedge\neg(\neg A\wedge B\wedge C))$

(iii) $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

問題 5. 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。

- 変数は自然数(0 を含む)を動き、論理記号の他に使える記号は、自然数定数 0, 1, 2,...、足し算 $+$、掛け算 $\cdot$、相等 $=$、大小比較 $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ のみとする。

  (i) どの素数も平方数ではない。

(ii)（ラグランジュの四平方定理）任意の自然数は 4 個の平方数（0 を含む）の和として表すことができる。

- 変数は実数を動き、論理記号の他に使える記号は、実数定数、足し算 $+$, 引き算 $-$, 掛け算 $\cdot$, 相等 $=$, 大小比較 $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ のみとする。($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が三次方程式であるためには $a \neq 0$ であることが必要なことに注意)

(iii) 実数係数三次方程式は必ず実数解を持つ。

- 変数は複素数を動き、論理記号の他に使える記号は、複素数定数、足し算 $+$, 引き算 $-$, 掛け算 $\cdot$, 相等 $=$ のみとする。

(iv) 複素数 a が 0 でなければ、三乗すると a になる複素数はちょうど三つある。

おまけ問題 1. 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。

（以下余白）