

問題用紙は 2 ページある。

**問題 1.**  $a$  は実数とする。写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全単射となる  $a$  の範囲を、 $f$  を以下のそれぞれで定義した場合に、それぞれ、求めよ。

- (i)  $f(x) = x^3 - ax$
- (ii)  $f(x) = x^3 - ax^2$
- (iii)  $f(x) = ax^3 - 1$
- (iv)  $f(x) = ae^x - 1$
- (v)  $f(x) = a \cos x - 1$

**問題 2.**  $\mathbb{R}$  の部分集合  $A$  を  $A = \{p + \sqrt{2}q \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$  で定める。この  $A$  を使って、 $\mathbb{R}$  上の二項関係  $\sim$  を以下のように定義する。

$$x \sim y \iff x - y \in A$$

(1)  $\sim$  は同値関係であることを示せ。

**ヒント**  $\sim$  が反射律・対称律・推移率をみたすことを示せばよい。すなわち、以下を示すとよい。

- $x - x \in A$  である。
- $x - y \in A$  ならば  $y - x \in A$  である。
- $x - y \in A$  かつ  $y - z \in A$  ならば  $x - z \in A$  である。

(2) 商集合  $\mathbb{R}/\sim$  を  $X$  と書く。写像  $f: X \times X \rightarrow X$  と  $g: X \rightarrow X$  を

$$f([x]_{\sim}, [y]_{\sim}) = [x + y]_{\sim} \qquad g([x]_{\sim}) = [-x]_{\sim}$$

で定義できることを示せ。

**ヒント** それぞれ、以下を示せば良い。

- $x \sim x'$  かつ  $y \sim y'$  のとき  $x + y \sim x' + y'$  が成り立つ。
- $x \sim x'$  のとき  $-x \sim -x'$  が成り立つ。

**問題 3.**  $(L, \sqsubseteq)$  を半順序集合とする。

$\perp, \top \notin L$  かつ  $\perp \neq \top$  として、集合  $L'$  を

$$L' = L \cup \{\perp, \top\}$$

で定める。 $L'$  上の二項関係  $\sqsubseteq'$  を、

$$x \sqsubseteq' y \iff x = \perp \text{ または } y = \top \text{ または } \lceil x, y \in L \text{ かつ } x \sqsubseteq y \rceil$$

で定める。

$\langle L', \sqsubseteq' \rangle$  も半順序集合であることを示せ。

(次ページにつづく)

**問題 4.** 以下の命題論理式を選言標準形と連言標準形に変形せよ。 $(\neg)$  は他の論理演算子よりも結合が強いものとする)

(i)  $(X \vee (Y \wedge Z)) \Rightarrow (X \wedge (Y \vee Z))$

(ii)  $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Z)) \wedge \neg(\neg(X \wedge Y) \Rightarrow Z)$

**問題 5.** 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。ただし、以下の制約がある。

- 変数は自然数全体を動くものとする。
- 使える記号は、論理記号の他には  $0, 1, 2, 3, \dots$  (具体的な自然数値)、 $+$  (足し算)、 $\cdot$  (掛け算)、 $=$  (等号)、 $<, >, \leq, \geq$  (不等号) のみとする。

- (1)  $a$  は正四面体数である。ただし、正四面体数とは、正整数  $n$  が存在して  $n(n+1)(n+2)/6$  と書ける数のことである。(注意：割り算記号は使わない)
- (2)  $a$  と  $b$  は互いに素である。
- (3) 最大の素数は存在しない。

**おまけ問題 1.** 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。

(以下余白)