

問題 1. a は実数とする。写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全単射となる a の範囲を、 f を以下のそれぞれで定義した場合に、それぞれ、求めよ。

(1) $f(x) = 1 - ax$

(3) $f(x) = e^x - ax$

(2) $f(x) = x^3 - ax$

(4) $f(x) = \cos x - ax$

問題 2. \mathbb{R} 上の二項関係 \sim を

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

で定める。

- (1) \sim は同値関係であることを示せ。
- (2) $x \sim x'$ かつ $y \sim y'$ ならば $x + y \sim x' + y'$ を示せ。
- (3) $x \sim x'$ ならば $-x \sim -x'$ を示せ。
- (4) $f: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ を $f(x) = [x]_{\sim}$ で定めると、 f は全単射であることを示せ。

問題 3. (L, \sqsubseteq) を半順序集合とする。

$\perp \notin L$ として、集合 L' と L' 上の二項関係 \sqsubseteq' を

$$L' = L \cup \{\perp\}$$

$$x \sqsubseteq' y \iff x = \perp \text{ または } [x, y \in L \text{ かつ } x \sqsubseteq y]$$

で定める。

- (1) (L', \sqsubseteq') も半順序集合であることを示せ。
- (2) (L, \sqsubseteq) が最大元をもてば (L', \sqsubseteq') も最大元をもつことを示せ。

問題 4. 以下の命題論理式について、それぞれ、真理値表を書け。

(1) $((A \wedge B) \vee C) \wedge ((B \wedge C) \vee A) \wedge ((C \wedge A) \vee B)$

(2) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(3) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$

(4) $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg C)$

問題 5. 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。ただし、以下の制約がある。

- 変数は自然数全体を動くものとする。
- 使える記号は、論理記号の他には $0, 1, 2, 3, \dots$ (具体的な自然数値)、 $+$ (足し算)、 \cdot (掛け算)、 $=$ (等号)、 $<$ (不等号) のみとする。(引き算記号と割り算記号は使わない。 $\neq, >, \leq, \geq$ も使わない)

- (1) a は奇数の三角数である。
- (2) a より大きく b より小さな三角数は存在しない。
- (3) p は a 以上の最小の素数である。
- (4) p は a の素因数である。

ヒント 三角数とは、正整数 n が存在して $n(n+1)/2$ と書ける数のことである。

おまけ問題 1. 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。