

**問題 1.** 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  についての以下のそれぞれの間について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

- (i)  $f$  も  $g$  も全射のとき、 $g \circ f$  は全射か？
- (ii)  $f$  も  $g$  も単射のとき、 $g \circ f$  は単射か？
- (iii)  $g \circ f$  が全射のとき、 $f$  は全射か？
- (iv)  $g \circ f$  が全射のとき、 $g$  は全射か？
- (v)  $g \circ f$  が単射のとき、 $f$  は単射か？
- (vi)  $g \circ f$  が単射のとき、 $g$  は単射か？

**問題 2.**  $(\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$  上の二項関係  $\sim$  を

$$(l, m, n) \sim (l', m', n') \iff ln' + m'n = l'n + mn'$$

で定める。(われわれは情報系なので  $0 \in \mathbb{N}$  とする)

- (1)  $\sim$  は同値関係であることを示せ。
- (2)  $(l, m, n) \sim (l', m', n')$  ならば  $(m, l, n) \sim (m', l', n')$  を示せ。
- (3)  $(l, m, n) \sim (l', m', n')$  かつ  $(p, q, r) \sim (p', q', r')$  ならば

$$(lr + np, mr + nq, nr) \sim (l'r' + n'p', m'r' + n'q', n'r')$$

を示せ。

**問題 3.** 以下の命題論理式について、それぞれ、真値表を書け。

- (1)  $(X \vee \neg Y) \wedge Z$
- (2)  $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z)$
- (3)  $(X \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow \neg Z)$
- (4)  $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$

**問題 4.** 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。ただし、以下の制約がある。

- 変数は自然数 (0 を含む) 全体を動くものとする。
- 使える記号は、論理記号の他には  $0, 1, 2, 3, \dots$  (具体的な自然数値)、 $+$  (足し算)、 $\cdot$  (掛け算)、 $=$  (等号)、 $<$  (不等号) のみとする。(引き算記号と割り算記号は使わない。 $\neq, >, \leq, \geq$  も使わない)

- (1) 10 は素数ではない。
- (2) 10 の倍数は 2 の倍数であり 5 の倍数でもある。
- (3) 10 は正四面体数である。
- (4) 正四面体数は素数ではない。
- (5) 任意の正整数は 5 個以下の正四面体数の和で表すことができる。

**ヒント** 正四面体数とは、正整数  $n$  が存在して  $n(n+1)(n+2)/6$  と書ける数のことである。割り算記号を使わずにこれを書く工夫をすれば良い。

**トリビア** 問題 4 の (5) はポロック予想と呼ばれる未解決問題である。

**おまけ問題 1.** 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。