離散数学 資料 5
関係

鴨 浩靖

関係とは

集合 A と集合 B の間の二項関係とは何かについて、二通りの方法がある。

1. 直積集合の部分集合。
   すなわち、$R \subset A \times B$
2. 直積集合から真偽値への写像。
   すなわち、$R : A \times B \to \{\,\text{真}, \text{偽}\,\}$

この授業では 1 を採用する。
$(x, y) \in R$ を $R(x, y)$ と書く。

一般の n 項関係も同様。

1 項関係だけは単項関係という。

中置記法

R が二項関係のときに限り、$R(x, y)$ を $x \mathrel{R} y$ と書くこともある。
たとえば、$<(2, 3)$ ではなく $2 < 3$

関係の合併・共通部分

関係 R, S の合併 $R \cup S$ と共通部分 $R \cap S$ は、
それぞれ、集合としての合併・共通部分をいう。

任意個の関係の合併・共通部分も同様。

関係の合成

A と B の間の関係 R と
B と C の間の関係 S に対して、
合成 $R \circ S$ を A と C の間の関係として次のように定義する。

$$x\,(R \circ S)\,z \iff \text{ある } y \in B \text{ が存在して } x\,R\,y \text{ かつ } y\,S\,z$$

逆関係

A と B の間の関係 R に対して、
逆関係 R^{-1} を B と A の間の関係として次のように定義する。

$$y \, R^{-1} \, x \iff x \, R \, y$$

冪

A と A の間の関係 R について、

$$
\begin{aligned}
R^0 &= =_A \\
R^1 &= R \\
R^2 &= R \circ R \\
R^3 &= R \circ R \circ R \\
R^4 &= R \circ R \circ R \circ R \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

推移的閉包

A と A の間の関係 R について、

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \qquad \text{(推移的閉包)}$$

$$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n \qquad \text{(反射的推移的閉包)}$$